Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava, šk.g. 2004/05

Eksponencijalne kongruencije
-Zadaci-

Zadaci predloženi za IMO

1. (IMO 1967, 4 zad.) Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je

$$A = \frac{(m+3)^n + 1}{3m}$$

ceo broj. Dokazati da je A neparan.

2. (IMO 1971, 3 zad.) Dokazati da niz $2^n - 3$, $n \geq 1$ sadrži beskonačno mnogo brojeva, takvih da su svaka dva uzajamno prosta.

3. (IMO 1990, 3 zad.) Naći sve prirodne brojeve n za koje

$$n^2 \mid 2^n + 1.$$

4. (IMO 1991, predlog) Naći najveći stepen k broja 1991 za koji 1991^k deli broj

$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}.$$

5. (IMO 1993, predlog) Neka su a, b, n prirodni brojevi, $b > 1$ i neka $b^n - 1 \mid a$. Dokazati da reprezentacija broja a u bazi b sadrži bar n cifara različitih od nule.

6. (IMO 1993, predlog) Za dati prirodan broj n, neka je S skup svih neparnih prirodnih brojeva manjih od n i uzajamno prostih sa n. Za $x \in S$ definišemo $f(x)$ kao najveći neparan delilac broja $n - x$. Dokazati:

(a) za svako $x \in S$ postoji $m \leq [\frac{n+1}{4}]$ takvo da je $f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x$, gde se f pojavljuje m puta;

(b) ako je n prost i ne deli $2^k - 1$ ni za koje $k = 1, 2, \ldots, n-2$, onda je najmanje m iz dela pod (a) upravo jednako $[\frac{n+1}{4}]$.

7. (IMO 1993, predlog) Za prirodan broj n kažemo da ima svojstvo P, ako uvek kada n deli $a^n - 1$ za neki prirodan broj a, tada n^2 deli $a^n - 1$.

1. Dokazati da svaki prost broj n ima svojstvo P.
2. Dokazati da postoji beskonačno mnogo složenih brojeva n koji imaju svojstvo P.

8. (IMO 1997, predlog) Dokazati da ako aritmetička progresija prirodnih brojeva sadrži potpun kvadrat i kub, da onda sadrži i potpun šesti stepen.

9. (IMO 1997, predlog) Neka su a, m, n prirodni brojevi takvi da je $b > 1$ i $m \neq n$. Dokazati da ako $b^m - 1$ i $b^n - 1$ imaju iste proste delioce da je tada $b + 1$ stepen od 2.

10. (IMO 1998, predlog) Naći sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodan broj m, takav da

$$2^n - 1 \mid m^2 + 9.$$

11. (IMO 1999, 4 zad.) Odrediti sve parove (n, p) pozitivnih celih brojeva za koje važi:

i) p je prost broj;

ii) $n \leq 2p$;

iii) broj $(p-1)^n + 1$ je deljiv sa n^{p-1}.

12. (IMO 2000, predlog) Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 2$ takve da za svaka dva cela broja a, b uzajamno prosta sa n važi :

$$a \equiv b \pmod{n} \Longleftrightarrow ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

13. (IMO 2000, 5 zad.) Dokazati da za svaki prirodan broj k postoji prirodan broj n koji ima tačno k prostih faktora i za koji važi:

$$n \mid 2^n + 1.$$

14. (IMO 2000, predlog) Odrediti sve prirodne brojeve a, m i n za koje

$$a^m + 1 \mid (a+1)^n.$$

15. (IMO 2001, predlog) Neka je $p \geq 5$ prost broj. Dokazati da postoji ceo broj a, $1 \leq a \leq p-2$ takav da nijedan od brojeva $a^{p-1} - 1$ i $(a+1)^{p-1} + 1$ nije deljiv sa p^2.

16. (IMO 2002, predlog) Neka su p_1, p_2,..., p_n prosti brojevi veći od 3. Dokazati da broj $2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ ima bar 4^n delioca.
(Probajte da nađete bolju procenu!)

17. (IMO 2003, 6 zad.) Neka je p prost broj. Dokazati da postoji prost broj q takav da, za svaki ceo broj n, $n^p - p$ nije deljivo sa q.

18. (IMO 2004, 6 zad.) Za prirodan broj kažemo da je alternirajući ukoliko su mu uzastopne cifre u decimalnom zapisu različite parnosti. Naći sve prirodne brojeve n koji dele neki alternirajući broj.

Zadaci sa domaćih takmičenja

19. (Savezno 1975, 4 raz.) Naći sve prirodne brojeve x, y i z $(z > 1)$ za koje je $1! + 2! + \ldots + x! = y^z$.

20. (Mala Olimpijada 1977) Odrediti sve šestorke (p, q, r, x, y, z), tako da su p, q, r prosti brojevi, a x, y, z prirodni brojevi i da važi $p^{2x} = q^y r^z + 1$

21. (Savezno 1979, 4 raz.) Dokazati da ne postoje prirodni brojevi n i $p > 5$, takvi da važi

$$(p-1)! + 1 = p^n.$$

22. (Savezno 1995, 2 raz.) Dokazati da broj $2^{2^{1995}} - 1$ ima bar 1995 različitih prostih faktora.

23. (Mala Olimpijada 1995) Neka je n prirodan broj koji u svom binarnom zapisu ima tačno 1995 jedinica. Dokazati da je broj $n!$ deljiv sa 2^{n-1995}.

24. (Republičko 1996, 2 raz.) U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu

$$7^x - 3 \cdot 2^y = 1.$$

25. (Savezno 1998, 2 raz.) Dokazati da ne postoji prirodan broj n takav da je $8^n + 2^n + 1$ potpun kvadrat.

26. (Interno 1999) Neka je $n + 2 = p$, gde je p neparan prost broj, i neka je

$$\frac{u}{v} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + 2 \cdot (-2)^k}{\binom{n}{k}},$$

za neke cele brojeve u, v. Dokazati da $p \mid u$.

27. (Republičko 2000, 3-4 raz.) Dati su prirodni brojevi q, n i r, $0 < r \leq n$. Dokazati da $r!$ deli broj $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$.

28. (Republičko 2002, 3 raz.) Naći sve prirodne brojeve n za koje je $2^n - 1$ deljivo sa n.

29. (Savezno 2002, 2 raz.) Neka su m i n prirodni brojevi. Dokazati da je broj $2^n - 1$ deljiv sa $(2^m - 1)^2$ ako i samo ako je broj n deljiv sa $m(2^m - 1)$.

30. (Republičko 2003, 3-4 raz.) Neka je $p > 2$ prost broj. Dokazati da je svaki delilac broja $2^p - 1$ oblika $2kp + 1$ za neki prirodan broj k.

31. (Republičko 2004, 3 raz. i Indija 1995) Ako je n prirodan broj takav da $n \mid (1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n) + 1$, dokazati da n nije deljiv nijednim kvadratom većim od 1.

Zadaci sa raznih takmičenja u svetu

32. (Bugarska 1989) Neka su x, y i z u parovima uzajamno prosti prirodni brojevi i p i q prosti brojevi za koje važe uslovi:

a) $6p$ ne deli $q - 1$;

b) q deli $x^2 + xy + y^2$;

c) q ne deli $x + y - z$.

Dokazati da $x^p + y^p \neq z^p$.

33. (India 1995) U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu:

$$7^x - 4 = 3^y.$$

34. (Sank Peterburg 1995) Dokazati da za svaki prirodan broj n veći od 1 za koji je $(n, 10) = 1$, postoji prirodan broj sastavljen od $n - 2$ cifre od kojih je svaka 1 ili 3, koji je deljiv sa n.

35. (Rumunija 1996) Odrediti sve parove prostih brojeva p i q za koje kongruencija

$$a^{3pq} \equiv a \pmod{3pq}$$

važi za svaki ceo broj a.

36. (Rumunija 1998) Naći sve parove prirodnih brojeva (x, n) takve da

$$x^n + 2^n + 1 \mid x^{n+1} + 2^{n+1} + 1.$$

37. (Bugarska 1998) Neka su $k \geq 2$ i $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ prirodni brojevi za koje važi $n_2 \mid 2^{n_1} - 1$, $n_3 \mid 2^{n_4} - 1$,..., $n_k \mid 2^{n_{k-1}} - 1$, $n_1 \mid 2^{n_k} - 1$. Dokazati da je $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$.

38. (Turska 2001) Naći sve parove (x, y) celih brojeva koji zadovoljavaju

$$5^x = 1 + 4y + y^4.$$

39. (Rumunija 2001) Neka je n paran prirodan broj. S je skup prirodnih brojeva a takvih da je $1 < a < n$ i da je $a^{a-1} - 1$ deljivo sa n. Dokazati da ako je $S = \{n - 1\}$ onda je $n = 2p$ gde je p prost broj.

40. (Vietnam 2001) Neka su dati prirodan broj n i dva uzajamno prosta prirodna broja veća od 1, a i b. Neka su p i q neparni prosti delioci veći od 1 broja $a^{6^n} + b^{6^n}$. Naći ostatak pri deljenju broja $p^{6^n} + q^{6^n}$ sa $6 \cdot (12)^n$.

41. (APMC 2002) Naći sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takvih da $2^c - 1 \mid 2^a + 2^b + 1$.

42. (Bugarska 2002) U skupu celih brojeva rešiti jednačinu $x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}$.

43. (Ukrajina 2002) U skupu celih brojeva rešiti jednačinu

$$n^{2002} = m(m + n)(m + 2n) \ldots (m + 2001n).$$

44. (Koreja 2003) Neka je m prirodan broj. Dokazati da:

$$2^{m+1} + 1 \mid 3^{2^m} + 1 \text{ ako i samo ako } 2^{m+1} + 1 \text{ je prost }.$$

45. (Mongolija 2003) Neka su m i n prirodni brojevi i $(m, 3) = 1$. Dokazati da, ako $1 + 39^n + 39^{2n} \mid 1 + 39^m + 39^{2m}$, tada $1 + 2003^n + 2003^{2n} \mid 1 + 2003^m + 2003^{2m}$

46. (Mongolija 2003) Neka su $n, r \geq 2$ celi brojevi i $Z_n^r = \{a^r \mid a \in Z_n\}$, gde je Z_n skup ostataka po modulu n. Dokazati da je $Z_n^r = Z_n$ ako i samo ako

$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$

$(r, \varphi(n)) = 1$

gde su $p_1, \ldots, p_r$ različiti prosti brojevi.

47. (BMO 2004) U skupu celih brojeva rešiti jednačinu

$$x^y - y^x = x \cdot y^2 - 19.$$

Razni zadaci

48. Ako su a, n, l prirodni brojevi i m_1,..., m_n, k_1,..., k_l nizovi prirodnih brojeva takvih da važi jednakost

$$(a^{m_1} - 1) \cdots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \cdots (a^{k_l} + 1),$$

naći sve moguće vrednosti koje može imati broj a.

49. (Aca Ilić) Ako je p neparan prost broj i a i b prirodni brojevi. Rešiti jednačinu $(p+1)^a - p^b = 1$.

50. (Kvant) U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $(x+1)^y - x^z = 1$.
Napomena: jasno je da je ovaj zadatak uopštenje zadatka broj 2.

51. Ako je $p > 2$ prost broj, dokazati da je

$$1^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}.$$

52. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu $x^y - 2^z = 1$.

53. Ako su p i q različiti prosti brojevi, dokazati:

$$p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}.$$

54. Odrediti sve parove (x, y) prirodnih brojeva za koje $2^x - 1 \mid 2^y + 1$.

55. Naći najmanje n za koje je $2^{1990} \mid 1989^n - 1$.

56. (Kvant M733)

a) Za koje prirodne brojeve m važi $2^m \mid 31^m - 1$.

b) Dokazati da za svako neparno a i prirodan broj m postoji beskonačno prirodnih brojeva k za koje $2^m \mid a^k - 1$.

c) Dokazati da za svaki neparan broj a postoji najviše konačno mnogo prirodnih brojeva m za koje $2^m \mid a^m - 1$.

57. Dokazati da ukoliko je n prirodan, a p bilo koji prost broj jednačina

$$x(x+1) = p^{2n} \cdot y(y+1)$$

nema rešenja u skupu celih brojeva.

58. Dokazati da se od bilo kojih $2p - 1$ (p prost broj) brojeva može izabrati p brojeva takvih da je njihova suma deljiva sa p. Takođe dokazati da se među bilo kojih $2n$ brojeva može izabrati n čiji je zbir deljiv sa n.

59. Neka je P moničan polinom sa celobrojnim koeficijentima sedmog stepena. Dokazati da postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $1 \le a < b \le 2002$ i

$$2003 \mid P(b) - P(a).$$

Marko Radovanović